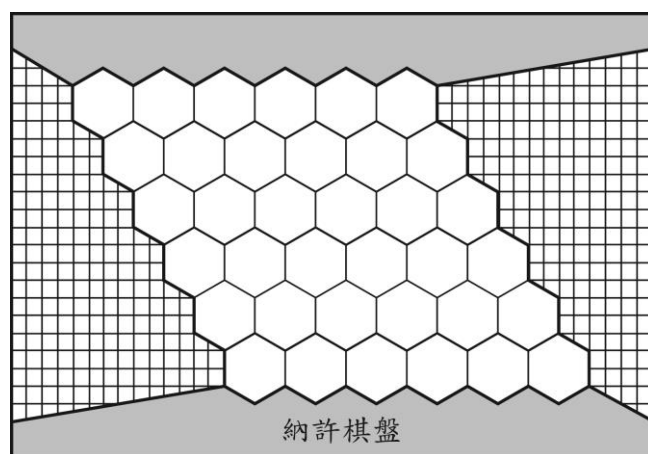


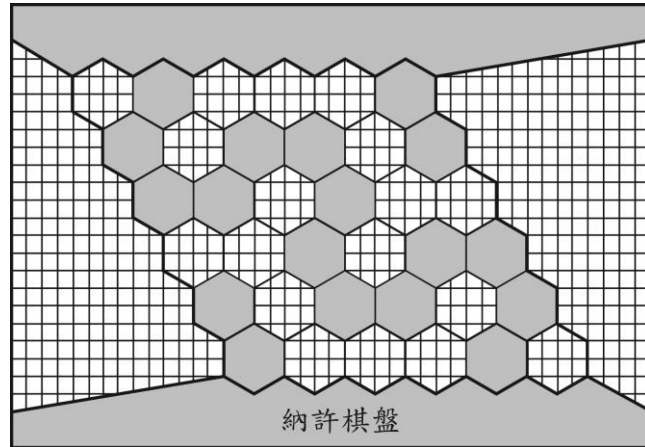
36 納許棋遊戲…剪紙的數學

看過電影「美麗境界」嗎？那部電影的主角是一位數學家，叫納許，劇情是演納許對抗病魔三十幾載，最終獲得諾貝爾經濟學獎的動人故事。這裡所要談的納許棋，是納許在普林斯頓高等研究院所發明的一道遊戲。事實上，早在納許發明這道遊戲的十幾年前，丹麥就有人提出過類似的遊戲，而且在丹麥很受歡迎。跟圍棋及西洋棋不同的地方是，納許棋盤是由正六邊形的格子所構成。我認識納許是從他的納許棋盤開始的，棋盤的樣子如下（這是 6 階的棋盤，共由 $6 \times 6 = 36$ 塊正六邊形土地鋪成）：

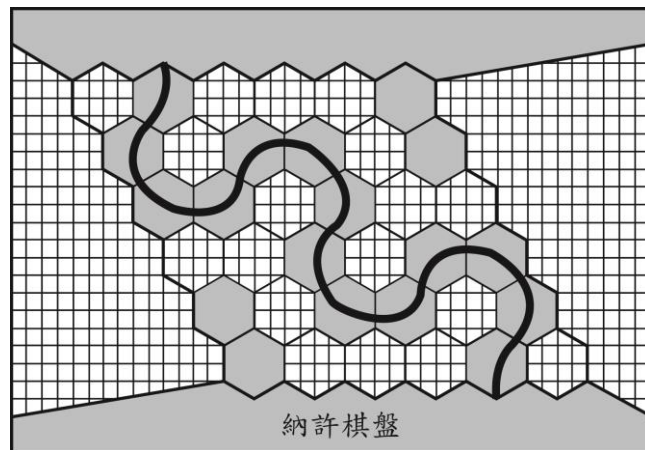


「灰」姑娘與「網」先生正在玩「納許棋」的遊戲。為了公正起見，棋盤內正六邊形土地以外的區域涇渭分明，上、下兩塊為灰姑娘的灰色領土，左、右兩側則是網先生的網狀土地。現在兩人輪流佔領正六邊形的土地，每次只能佔一塊，並將佔領的土地塗成灰色（灰姑娘的領土）或畫成網格（網先生的土地）。在十八回合後，灰姑娘與網先生將分別佔領三十六塊土地的一半。

遊戲的勝負如何判定呢？那要看誰能將她（他）的兩塊土地，用佔領的正六邊形土地連接起來。也就是說，灰姑娘從上方灰色領土出發，在只能經過她佔領的正六邊形土地的情況下，可以到達下方灰色領土出時，灰姑娘就獲勝；同樣的，若網先生從左側的網狀土地出發，利用他所佔領的正六邊形土地，可以抵達右側的網狀土地，則網先生得勝。例如，下圖是灰姑娘與網先生某次的交戰紀錄（灰色正六邊形為灰姑娘所佔，網格正六邊形為網先生所有）：



在下圖中，因為粗黑線的路徑是灰姑娘從上方灰色領土走到下方灰色領土的一條路徑，所以這盤棋由灰姑娘得勝。



從遊戲的特性不難發現，不可能兩人都獲勝，如果一人可以連接他的領土，那麼另一人的土地肯定被這串連的線所阻隔。也就是說，至多僅有一人可以把他的領土串連起來。有沒有可能發生兩者都無法串連她們的土地之情況呢？這正是本節所要討論的問題：

無論雙方如何佔領正六邊形土地，最後一定有人會得到勝利，也就是說，納許棋是一種不會平手的遊戲。

我們可以將納許棋盤設計成電路，當一方將兩片土地串連起來時，電就通了，會亮燈，從亮燈的顏色就可以知道誰獲勝。想把這道遊戲設計成電腦可以玩的遊戲，就需要從電路這個方向來寫程式。幸運的是，網站上有人幫我們完成了這件工作，只要到底下的網站

<http://home.earthlink.net/~vanshel/>

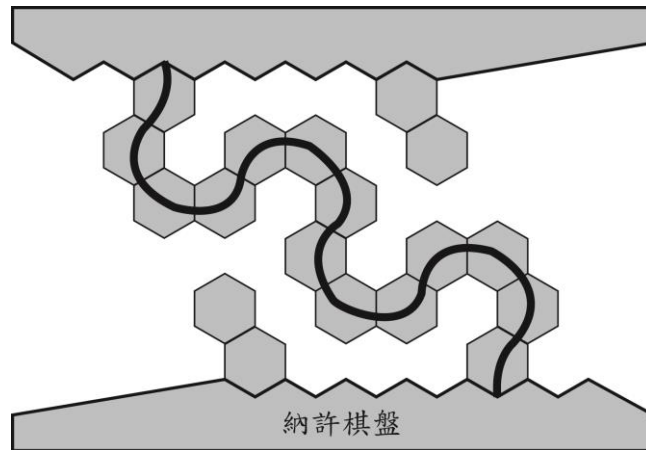
就可以下載納許棋來玩，可以跟電腦玩，也可以兩人玩，甚至可以改變棋盤的大小。兩人玩的遊戲有許多，如象棋，五子棋，圍棋，西洋棋，猜拳（剪刀、石頭、布）等，但是它們都可能和棋。然而，納許棋這道遊戲不可能和棋，一定可以分出勝負，而且是在十八回合內分出勝負，有點不可思議。要如何證明「不會和棋」呢？這似乎超過我們的能力，或者說，截至目前為止，所學的數學沒辦法克服這樣的問題。真的是如此嗎？讓我們來欣賞灰姑娘的錦囊妙計：

剪紙是中國最為流行的民間藝術之一，根據考古其歷史可追溯到公元六世紀。唐朝有位詩人曾經有著「欲剪宜春字，春寒入剪刀」的詩句，可見剪紙這項技藝在當時社會中，已經是十分普遍的一項民間技藝了。

納許棋會跟剪紙技藝有關嗎？有的，因為它們都在紙上操作，想想看，把其中一方的領土剪掉，剩下的紙張會是什麼模樣呢？

如果網先生的兩塊網狀領土可以透過他佔領的正六邊形土地銜接，那麼網先生就是獲勝的人。否則（網先生無法銜接他的兩塊網狀領土），需說明灰姑娘可以串連她的灰色土地。說明方法是這樣的：

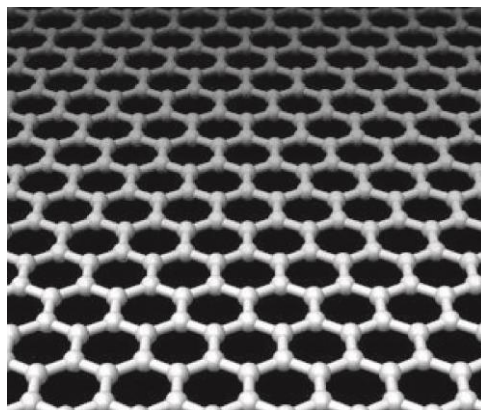
- ① 利用剪刀將網先生的左、右兩塊網狀領土剪掉。
- ② 再利用剪刀將網先生佔領的十八塊正六邊形網形土地也剪掉。
- ③ 此時棋盤剩下灰姑娘的上、下兩塊灰色土地及她所佔領的十八塊正六邊形灰色土地。
- ④ 將右手抓住灰姑娘上方灰色土地，左手捏著灰姑娘下方的灰色領土。看看是否可以將它們拉開。
- ⑤ 若不能拉開，則表示灰姑娘的上、下兩塊灰色土地被她佔領的正六邊形灰色土地串連起來。這種情形就像下圖所示的一樣。
- ⑥ 若可以拉開，則沿著灰姑娘的上方灰色土地的下沿，可以找到貫穿網先生左、右兩塊網狀領土的路徑，這樣代表網先生獲勝。



到此，我們已經知道納許棋是一種不會平手的遊戲。接下來的問題就是「先玩者與後玩者何者有必勝的策略呢？」這是一道更困難的問題，它的解法也超玄的，想知道結果可以參考《算術講義》那本書。

納許棋的棋盤是由正六邊形的幾何圖形所構成，據說普林斯頓高等研究院當時的磁磚就是正六邊形，而這也是啟發納許發明此遊戲的動機之一。到過澎湖的人一定會到有名的天后宮參觀，仔細觀察其地磚，將會發現也用了正六邊形的磁磚。事實上，金門的洋樓或廟宇，鹿港的天后宮與龍山寺也使用正六邊形的磁磚，正六邊形是很好用的幾何圖形，特別是在鑲嵌平面上。

納許棋盤這種蜂窩狀結構除了日常生活中常見外，在科學上也扮演著舉足輕重的角色。俄羅斯出身的學者蓋姆與諾伏西羅夫共同獲得 2010 年諾貝爾物理學獎，他們是研究石墨烯的先驅，而這種薄膜號稱是二十一世紀的神奇材料。瑞典皇家科學院讚揚石墨烯是「完美的原子晶格」，因為這種材料在電腦、家用裝置和運輸方面都有很大發展潛力。



石墨烯的厚度只有一個原子，是世界最薄卻也是最堅強的奈米材料，幾乎透明，而且能

夠導電和傳熱。因此，石墨烯獲看好是可能取代矽半導體的材料。